

中学生数学
课外读物

51.2
4460

数学归纳法

华罗庚

上海教育出版社

中学生数学课外读物

数 学 归 纳 法

华 罗 庚

上海教育出版社

一九六四年·上海

中学生数学課外讀物
数 学 归 納 法
华 罗 庚

*

上 海 教 育 出 版 社 出 版
(上 海 永 福 路 123 号)

上海市书刊出版业营业许可证出 090 号

上海市印刷三厂印刷

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32 印張：1 7/8 字數：39,000

1963 年 11 月第 1 版 1964 年 5 月第 3 次印刷

印數：48,001—146,000 本

統一書號：7150 · 1457

定 价：(七) 0.15 元

· 編輯說明

数学,在中学里是一門基本工具学科,通过这一学科的教学,必須使中学生掌握数学这个工具,为他們参加生产劳动和进一步学习打下扎实的基础。为了使中学生学好数学,除了必須用最大的努力提高教学质量以外,还需要各方面的配合。我們編輯这套“中学生数学課外讀物”,目的就在于配合教学,使中学生更好地掌握基础知识,进一步提高基本技能,同时扩大他們的眼界,培养他們对数学的爱好,以帮助他們适应参加生产劳动和进一步学习的需要。

这套讀物的內容主要包括下列两个方面:一、就中学数学課程中的一些問題,介紹为深透理解这些問題所需要的基础知識,并提供一些必要的习题,以加强基本訓練和提高运用知識解决实际問題的能力;二、就一些与中学数学有关的专题,介紹数学方法,邏輯知識,数学某些分支的概况,数学史方面的知識,等等。

这套讀物的編写还是一种新的尝试。無論在选题、要求、內容、体裁等方面是否能适合中学生的需要,希望教育工作者和讀者對我們提出寶貴的意見,同时还希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物,帮助我們做好这套讀物的編輯工作。

中学生数学課外讀物編审委员会

1963年8月

目 录

一	写在前面	1
二	归纳法的本原	3
三	两条缺一不可	6
四	数学归纳法的其他形式	11
五	归纳法能帮助我们深思	16
六	“题”与“解”	19
七	递归函数	25
八	排列和组合	28
九	代数恒等式方面的例题	32
十	差分	35
十一	李善兰恒等式	40
十二	不等式方面的例题	43
十三	几何方面的例题	50
十四	自然数的性质	55

一 写在前面

高中代数教科书里，讲过数学归纳法，也有不少的数学参考书讲到数学归纳法。但是，我为什么还要写这本小册子呢？

首先，当然是由于这个方法的重要。学好了、学透了，对进一步学好高等数学有帮助，甚至对认识数学的性质，也会有所裨益。但更主要的，我总觉得有些看法、有些材料，值得补充。而这些看法和材料，在我学懂数学归纳法的过程中，曾经起过一定的作用。

这里，我先提出其中的一点。

我在中学阶段学习数学归纳法这部分教材的时候，总认为学会了

“1 对；假设 n 对，那末 $n+1$ 也对”

的证明方法就满足了。后来，却愈想愈觉得不满足，总感到还差了些什么。

抽象地谈恐怕谈不清楚，还是举个例子来说明吧。

例如：求证

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2. \quad (1)$$

这个问题当时我会做。证法如下：

证明：当 $n=1$ 的时候，(1)式左右两边都等于 1；所以，当 $n=1$ 的时候，(1)式成立。

假設当 $n=k$ 的时候(1)式成立, 就是

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{1}{2}k(k+1) \right]^2. \quad (2)$$

那末, 因为

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\ &= \left[\frac{1}{2}k(k+1) \right]^2 + (k+1)^3 \\ &= \left[\frac{1}{2}(k+1) \right]^2 [k^2 + 4(k+1)] \\ &= \left[\frac{1}{2}(k+1) \right]^2 [k+2]^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right]^2, \end{aligned}$$

所以, 当 $n=k+1$ 的时候, (1)式也成立.

因此, 对于所有的自然数 n , (1)式都成立. (证毕)

上面的证明步骤是不是完整了呢? 当然, 是完整了. 老师应当不加挑剔地完全认可了.

但是, 我后来仔细想想, 却感到有些不满足. 问题不是由于证明错了, 而是对上面这个恒等式(1)是怎样得来的, 也就是对前人怎样发现这个恒等式, 产生了疑问. 难道这是从天上掉下来的吗? 当然不是! 是有“天才”的人, 直观地看出来的吗? 也不尽然!

这个问题启发了我: 难处不在于有了公式去证明, 而在于没有公式之前, 怎样去找出公式来; 才知道要点在于言外, 而我们以前所学到的, 仅仅是其中比较容易的一个方面而已.

我这样说, 请不要跟学校里对同学们的要求混同起来, 作为中学数学教科书, 要求同学们学会数学归纳法的运用, 就可

以了，而这本书是中学生的数学課外讀物，不是教科书，要求也就不同了。

話虽如此，一切我們还是从头讲起。

二 归納法的本原

先从少数的事例中摸索出規律来，再从理論上来证明这一規律的一般性，这是人們認識客观法則的方法之一。

以識数为例。小孩子識数，先学会数一个、两个、三个；过些时候，能够数到十了；又过些时候，会数到二十、三十、……一百了。但后来，却决不是这样一段一段地增长，而是飞跃前进。到了某一个时候，他領悟了，他会說：“我什么数都会数了”。这一飞跃，竟从有限跃到了无穷！怎样会的？首先，他知道从头数；其次，他知道一个一个按次序地数，而且不愁数了一个以后，下一个不会数。也就是他領悟了下一个数的表达方式，可以由上一个数来决定，于是，他也就学会数任何一个数了。

設想一下，如果这个飞跃現象不出現，那末人們一輩子就只能学数数了，而且人生有限，数目无穷，就是学了一輩子，也决不会学尽呢！

解釋这个飞跃現象的原理，正就是数学归納法。数学归納法大大地帮助我們認識客观事物，由簡到繁，由有限到无穷。

从一个袋子里摸出来的第一个是紅玻璃球、第二个是紅玻璃球、甚至第三个、第四个、第五个都是紅玻璃球的时候，我

們立刻會出現一種猜想：“是不是這個袋里的東西全部都是紅玻璃球？”但是，當我們有一次摸出一個白玻璃球的時候，這個猜想失敗了；這時，我們會出現另一個猜想：“是不是袋里的東西，全部都是玻璃球？”但是，當有一次摸出來的是一个木球的時候，這個猜想又失敗了；那時我們會出現第三個猜想：“是不是袋里的東西都是球？”這個猜想對不對，還必須繼續加以檢驗，要把袋里的東西全部摸出來，才能見個分曉。

袋子裡的東西是有限的，遲早總可以把它摸完，由此可以得出一個肯定的結論。但是，當東西是無窮的時候，那怎麼辦？

如果我們有這樣的一個保證：“當你這一次摸出紅玻璃球的時候，下一次摸出的東西，也一定是紅玻璃球”，那末，在這樣的保證之下，就不必費力去一個一個地摸了，只要第一次摸出來的確實是紅玻璃球，就可以不再檢查地作出正確的結論：“袋里的東西，全部是紅玻璃球”。

這就是數學歸納法的引子，我們採用形式上的講法，也就是：

有一批編了號碼的數學命題；我們能夠證明第 1 號命題是正確的；如果我們能夠證明在第 k 號命題正確的時候，第 $k+1$ 號命題也是正確的，那末，這一批命題就全部正確。

在上一節里舉過的例子：

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2. \quad (1)$$

當 $n=1$ 的時候，這個等式就成為

$$1^3 = \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \right]^2.$$

这是第 1 号命题。(这个命题可以通过验证, 证实它是成立的.)

当 $n=k$ 的时候, 这个等式成为

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{1}{2}k(k+1) \right]^2, \quad (2)$$

这是第 k 号命题。(这个命题是假设能够成立的.)

而下一步就是要在第 k 号命题成立的前提下, 证明第 $k+1$ 号命题

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right]^2$$

也成立. 所以这个证法就是上面所说的这一原则的体现.

再看下面的一个例子.

例 求证:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \quad (3)$$

第 1 号命题是: 当 $n=1$ 的时候, 上面这个等式成为

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1}.$$

这显然是成立的.

现在假设第 k 号命题是正确的, 就是假设

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

那末, 第 $k+1$ 号命题的左边是

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2},$$

恰好等于第 $k+1$ 号命题的右边, 所以第 $k+1$ 号命题也正确.

由此, 我们就可以作出结论: 对于所有的自然数 n , (3) 式都成立.

附言: 上面的证明中, 假设“第 k 号命题是正确的”, 我们有时用“归纳法假设”一语来代替.

三 两条缺一不可

这里, 必须强调一下, 在我们的证法里:

(1) “当 $n=1$ 的时候, 这个命题是正确的”;

(2) “假设当 $n=k$ 的时候, 这个命题是正确的, 那末当 $n=k+1$ 的时候, 这个命题也是正确的”, 这两条缺一不可.

不要认为, 一个命题在 $n=1$ 的时候, 正确; 在 $n=2$ 的时候, 正确; 在 $n=3$ 的时候也正确, 就正确了. 老实说, 不要说当 $n=3$ 的时候正确还不算数, 就是一直到当 n 是 1 千的时候正确, 或者 1 万的时候正确, 是不是对任何自然数都正确, 还得证明了再说.

不妨举几个例子.

例 1 当 $n=1, 2, 3, \dots, 15$ 的时候, 我们可以验证式子

$$n^2 + n + 17$$

的值都是素数^①。是不是由此就可以作出这样的結論：“ n 是任何自然数的时候， $n^2 + n + 17$ 的值都是素数”呢？

这个命题是不正确的。事实上，当 $n = 16$ 的时候，

$$\begin{aligned}n^2 + n + 17 &= 16^2 + 16 + 17 \\&= 17^2,\end{aligned}$$

它就不是素数。

不仅如此，我們还可以举出同样性质的例子：

(1) 当 $n = 1, 2, 3, \dots, 39$ 的时候，式子

$$n^2 + n + 41$$

的值都是素数；但是，当 $n = 40$ 的时候，它的值就不是素数。

(2) 当 $n = 1, 2, 3, \dots, 11000$ 的时候，式子

$$n^2 + n + 72,491$$

的值都是素数，即使如此，我們还不能肯定 n 是任何自然数的时候，这个式子的值总是素数。事实上，只要 $n = 72,490$ 的时候，它的值就不是素数。

这也就是说，即使我們試了 11,000 次，式子

$$“n^2 + n + 72,491”$$

的值都是素数，但我們仍旧不能断定这个命题一般的正确性。

例 2 式子

$$2^{2^n} + 1,$$

当 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 的时候，它的值分别等于 3, 5, 17, 257, 65537，这 5 个数都是素数。根据这些資料，費尔馬(Fermat)

^① 素数又称质数，就是除 1 和它本身以外，不能被其他自然数整除的数。

就猜想：对于任何自然数 n ，式子

$$2^{2^n} + 1$$

的值都是素数。但这是一个不幸的猜测。欧拉 (Euler) 举出，当 $n=5$ 的时候，

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6,700,417.$$

因而费尔马猜错了。

后来，有人还证明当 $n=6, 7, 8, 9$ 的时候， $2^{2^n} + 1$ 的值也都不是素数。

例 3 $x - 1 = x - 1,$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1),$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$$

.....

从上面这些恒等式，可以看出什么来？

我們可以看出一点：“把 $x^n - 1$ 分解为不可再分解并且具有整系数的因式以后，各系数的绝对值都不超过 1”。

这个命题是不是正确呢？这就是所谓契巴塔廖夫 (Н. Г. Чеботарев) 问题。后来被依万诺夫 (В. Иванов) 找出了反例，他发现 $x^{105} - 1$ 有下面的因式

$$\begin{aligned} & x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} \\ & + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} \\ & - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} \\ & + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^5 - 2x^7 - x^6 \\ & - x^5 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

其中 x^4 和 x^7 的系数都是 -2 , 它的绝对值大于 1.

虽然如此, 我們可以证明上面的命题, 当 n 是素数的时候, 总是对的; 当 $n < 105$ 的时候, 也总是对的.

例 4 一个平面把空间分为两份; 两个平面最多可以把空间分为四份; 三个平面最多可以把空间分为八份. 从这些资料, 我們能不能得出这样的結論:

“ n 个平面最多可以把空间分为 2^n 份”?

这个命题是不正确的. 事实上, 四个平面不可能把空间分为 16 份, 而最多只能分为 15 份; 五个平面也不可能把空间分成 32 份, 而最多只能分为 26 份. 一般地说, n 个平面最多可以把空间分为 $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ 份, 而不是 2^n 份, 并且的确有这样的 n 个平面存在.

怎样证明这一点, 讀者可以自己思考^①. 在思考的过程中, 可以先从比較容易的問題入手, 試一試证明下面这个命题:

平面上 n 条直綫, 最多可以把平面分为 $1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ 份.

上面这几个例子, 总的說明了一个問題: 对于一个命题, 仅仅验证了有限次, 即使是千次、万次, 还不能肯定这个命题的一般正确性. 而命题的一般正确性, 必須要看我們能不能证明数学归納法的第二句話: “假設当 $n=k$ 的时候, 这个命题是正确的, 那末当 $n=k+1$ 的时候, 这个命题也是正确的”.

另一方面, 也不要以为“当 $n=1$ 的时候, 这个命题是正确的”, 这句話簡單而丟开不管. 在证題的时候, 如果只证明了

① 本书以后将证明这一結論(見第 52 頁).

“假設当 $n=k$ 的时候, 这个命题是正确的, 那末当 $n=k+1$ 的时候, 这个命题也是正确的”, 而不去验证“当 $n=1$ 的时候, 这个命题是正确的”, 那末这个证明是不对的, 至少也得說, 这个证明是不完整的.

讓我們来看几个由于不确切地闡明数学归纳法里的第一句話“当 $n=1$ 的时候, 这个命题是正确的”, 而得出非常荒謬的結果的例子.

例 5 所有的正整数都相等.

这个命题显然是荒謬的. 但是如果我們丟开“当 $n=1$ 的时候, 这个命题是正确的”不管, 那末可以用“数学归纳法”来“证明”它.

这里, 第 k 号命题是: “第 $k-1$ 个正整数等于第 k 个正整数”, 就是

$$k-1=k.$$

两边都加上 1, 就得

$$k=k+1.$$

这就是說, 第 k 个正整数等于第 $k+1$ 个正整数. 这不是說明了所有的正整数都相等了嗎?

錯誤就在于, 我們沒有考虑 $k=1$ 的情况.

例 6 如果我們不考虑 $n=1$ 的情况, 可以证明

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 + l.$$

这里, l 是任何的数.

事实上, 假設第 k 号命题

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{1}{2} k(k+1) \right]^2 + l$$

正确,那末象第2頁里证过的一样,第 $k+1$ 号命题

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right]^2 + 1$$

也就正确.

但是,这个結論显然是荒謬的.

讲到这里,讓我們再重复說一遍:数学归納法的证明过程必須包括两个步驟:“当 $n=1$ 的时候,这个命题是正确的”;“假設当 $n=k$ 的时候,这个命题是正确的,那末当 $n=k+1$ 的时候,这个命题也是正确的”.两者缺一不可!缺一不可!

也許有人会問:上面的第一句話要不要改做“当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 的时候,这个命题是正确的”?

这样的要求是多余的,同时也是不正确的.所以多余,在于除了用 $n=1$ 来驗证以外,还要用 $n=2$ 和 $n=3$ 来驗证,而它的不正确則在于“……”.如果“……”表示試下去都正确,那末試問到底要試到什么地步才算試完呢?

“多余”还可以解釋成我是从 $n=1, n=2, n=3$ 里看出規律来的,或者希望通过练习熟悉这个公式;但在沒有证明 n 是所有自然数时都对以前就加上“……”,却要不得,这是犯了邏輯上的錯誤!

四 数学归納法的其他形式

数学归納法有不少“变着”.下面我們先来讲几种“变着”

(1) 不一定从 1 开始. 也就是数学归纳法里的两句话, 可以改成: 如果当 $n=k_0$ 的时候, 这个命题是正确的, 又从假设当 $n=k(k \geq k_0)$ 时, 这个命题是正确的, 可以推出当 $n=k+1$ 时, 这个命题也是正确的, 那末这个命题当 $n \geq k_0$ 时都正确.

例 1 求证: n 边形 n 个内角的和等于 $(n-2)\pi$.

这里就要假定 $n \geq 3$.

证明 当 $n=3$ 时, 我们知道三角形三个内角的和是 2 直角. 所以, 当 $n=3$ 时, 命题是正确的.

假设当 $n=k(k \geq 3)$ 时命题也是正确的. 设 A_1, A_2, \dots, A_{k+1} 是 $k+1$ 边形的顶点. 作线段 A_1A_k , 它把这个 $k+1$ 边形分成两个图形, 一个是 k 边形 $A_1A_2 \dots A_k$, 另一个是三角形 $A_kA_{k+1}A_1$. 并且 $k+1$ 边形内角的和等于后面这两个图形的内角和的和. 就是

$$(k-2)\pi + \pi = (k-1)\pi = [(k+1)-2]\pi.$$

也就是说, 当 $n=k+1$ 时这个命题也是正确的. 因此, 定理得证.

例 2 求证: 当 $n \geq 5$ 的时候, $2^n > n^2$.

证明 当 $n=5$ 时,

$$2^5 = 32, \quad 5^2 = 25;$$

所以

$$2^5 > 5^2.$$

假设当 $n=k(k \geq 5)$ 时这个命题是正确的, 那末由

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\ &> 2 \times k^2 \\ &\geq k^2 + 5k \\ &> k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

可知这个命题当 $n=k+1$ 时也是正确的. 因此, 这个命题对于所有大于或等于 5 的自然数 n 都正确.

例 3 求证: 当 $n \geq -4$ 的时候, $(n+3)(n+4) \geq 0$.

证明 当 $n = -4$ 时, 这个不等式成立.

假设当 $n = k$ ($k \geq -4$) 时, 这个不等式成立, 那末由

$$\begin{aligned} & [(k+1)+3][(k+1)+4] \\ &= (k+4)(k+5) \\ &= k^2 + 9k + 20 \\ &= (k+3)(k+4) + 2k + 8 \\ &\geq (k+3)(k+4), \\ & \quad (\because \text{当 } k \geq -4 \text{ 时, } 2k + 8 \geq 0.) \end{aligned}$$

即得所证.

(2) 第二句话也可以改为“如果当 n 适合于 $1 \leq n \leq k$ 时, 命题正确, 那末当 $n = k+1$ 时, 命题也正确”. 由此同样可以证明对于所有的 n 命题都正确.

例 4 有两堆棋子, 数目相等. 两人玩耍, 每人可以在一堆里任意取几颗, 但不能同时在两堆里取, 规定取得最后一颗者胜. 求证后取者可以必胜.

证明 设 n 是棋子的颗数. 当 $n=1$ 时, 先取者只能在一堆里取 1 颗, 这样另一堆里留下的 1 颗就被后取者取得. 所以结论是正确的.

假设当 $n \leq k$ 时命题是正确的. 现在我们来证明, 当 $n = k+1$ 时, 命题也是正确的.

因为在这种情况下, 先取者可以在一堆里取棋子 l 颗 ($1 \leq l \leq k+1$), 这样, 剩下的两堆棋子, 一堆有棋子 $(k+1)$ 颗, 另一堆有棋子 $(k+1-l)$ 颗. 这时后取者可以在较多的一堆里

取棋子 l 顆，使兩堆棋子都有 $(k+1-l)$ 顆。这样就变成了 $n=k+1-l$ 的問題。按照規定，后取者可以得胜。由此就证明了对于所有的自然数 n 來說，后取者都可以得胜。

讀者可以自己考慮一下，如果任給兩堆棋子，能不能數一下棋子的顆數，就知道誰胜誰負？

(3) 有时，第二句話需要改成“假設当 $n=k$ 的时候，这个命題是正确的，那末当 $n=k+2$ 的时候，这个命題也是正确的”。这时，第一句話仅仅驗證“当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的”就不够了；而要改成：“当 $n=1, 2$ 的时候，这个命題都是正确的。”

例 5 求证：适合于

$$x+2y=n \quad (x \geq 0, y \geq 0, \text{ 并且 } x, y \text{ 都是整数}) \quad (1)$$

的解的組数 $r(n)$ ① 等于

$$\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}[1+(-1)^n].$$

(1)式的解，可以分为两类：“ $y=0$ ”的和“ $y \geq 1$ ”的。前一类解的組数等于 1；后一类解的組数等于

$$x+2(y-1)=n-2$$

适合于 $x \geq 0, y-1 \geq 0$ (x, y 都是整数)的解的組数 $r(n-2)$ ，所以

$$r(n) = r(n-2) + 1$$

如果仅仅知道当 $n=1$ 时， $r(n)=1$ (这时 $x+2y=1$ ，所

① 因为适合这个方程的解的組数与 n 有关，所以我們用符号 $r(n)$ 来表示。例如，当 $n=5$ 时，方程有 3 組解，所以 $r(n)=3$ 。

以适合条件的解只有一组, 就是 $x=1, y=0$), 就只能推出当 n 是奇数时, $r(n) = \frac{1}{2}(n+1)$, 而还不能推出 n 是偶数时的情况. 必须再算出, 当 $n=2$ 时,

$$x+2y=2$$

有两组解 $x=2, y=0$ 和 $x=0, y=1$, 即 $r(2)=2$, 才能推出

当 n 是偶数时, $r(n) = \frac{1}{2}(n+2)$. 这样归纳法才完整.

作为练习, 读者可以试一试解下面这个比较更复杂的题目: 求适合于

$$2x+3y=n \quad (x \geq 0, y \geq 0, \text{ 并且 } x, y \text{ 都是整数})$$

的解的组数.

(4) 一般的, 还可以有以下的“变着”:

当 $n=1, 2, \dots, l$ 时, 这个命题都是正确的, 并且证明了“假设当 $n=k$ 时, 这个命题正确, 那末当 $n=k+l$ 时, 这个命题也正确”, 于是当 n 是任何自然数时, 这个命题都是正确的.

例 6 求证: 适合于

$$x+ly=n \quad (x \geq 0, y \geq 0, \text{ 并且 } x, y \text{ 都是整数})$$

的解的组数等于 $\left[\frac{n}{l}\right]+1$. 这里符号 $\left[\frac{n}{l}\right]$ 表示商 $\frac{n}{l}$ 的整数部分.

证明留给读者.

数学归纳法的“变着”还有不少, 读者以后还会看到“反向归纳法”、“翘翘板归纳法”等等.

五 归納法能幫助我們深思

大家都知道，数学归納法有幫助我們“进”的一面。現在我想談談数学归納法幫助我們“退”的一面。把一个比較复杂的問題，“退”成最簡單最原始的問題，把这个最簡單最原始的問題想通了、想透了，然后再用数学归納法来一个飞跃上升，于是問題也就迎刃而解了。

我們还是举一个具体的例子来談。

这是一个有趣的数学游戏，但它充分說明了，一个人会不会应用数学归納法，在思考問題上就会有很大的差异。不会应用数学归納法的人，要想解决这个問題着实要些“聪明”，但是融会貫通地掌握了数学归納法的人，解决这个問題就不需要多少“聪明”。

問題是这样的：

有一位老师，想辨別出他的三个得意門生中哪一个更聪明一些，他采用了以下的方法。事先准备好 5 頂帽子，其中 3 頂是白的，2 頂是黑的。在試驗时，他先把这些帽子让学生們看了一看，然后要他們閉上眼睛，替每个学生戴上一頂白色的帽子，并且把 2 頂黑帽子藏了起来，最后再讓他們張开眼睛，請他們說出自己头上戴的帽子，究竟是哪一种顏色。

三个学生相互看了一看，躊躇了一会儿，然后他們异口同声地說，自己头上戴的是白色的帽子。

他們是怎样推算出来的呢？他們怎样能够从別人头上戴的帽子的顏色，正确地推断出自己头上戴的帽子的顏色的呢？

建議讀者，讀到这儿，暫時把書攔下來，自己想一想，能够想出來嗎？如果一時想不出，可以多想一些時候。

× × × ×

現在，我把謎底揭曉一下：甲、乙、丙三個學生是怎样想的。

甲这样想^①：{如果我头上戴的是黑帽子，那末乙一定会这样想：[如果我头上戴的是黑帽子，那末丙一定会这样想：(甲乙两人都戴了黑帽子，而黑帽子只有两顶，所以自己头上戴的一定是白帽子。)]这样，丙就会脱口而出地说出他自己头上戴的是白帽子。但是他为什么要躊躇？可見自己〈指乙〉头上戴的是白帽子。]如果这样乙也会脱口而出地说出他自己头上戴的是白帽子。但是他为什么也要躊躇呢？可見自己〈指甲〉头上戴的不是黑帽子。}

經過这样思考，于是三个人都推出了自己头上戴的是白帽子。

讀者讀到这儿，請再想一下，想通了沒有？有些伤脑筋吧！

学过数学归纳法的人会怎样想呢？他会先退一步，(善于“退”，足够地“退”，“退”到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！)不考虑三个人而仅仅考虑两个人一顶黑帽子的问题。这个问题誰都会解，黑帽子只有一顶，我戴了，他立刻会说：“自己戴的是白帽子”。但是，他为什么要躊躇呢？可見我戴的不是黑帽子而是白帽子。

这就是說，“两个人，一顶黑帽子，不管多少（当然要不少

^① 为了讀者容易看懂，这里加上了一些括号，{ }里的是甲的想法，[]里的是甲設想乙应当有的想法，()里的是甲設想乙应当为丙設想的想法。

于 2) 頂白帽子”的問題，是一個輕而易舉的問題。

現在我們來解上面這個較複雜的：“三個人，兩頂黑帽子，不管多少（當然要不少於 3）頂白帽子”的問題也就容易了。為什麼呢？如果我頭上戴的是黑帽子，那末對於他們兩人來說，就變成“兩個人，一頂黑帽子”的問題，這是他們兩人應當立刻解決的問題，是不必躊躇的。現在他們在躊躇，就說明了我頭上戴的不是黑帽子而是白帽子。

這裡可以看到，學會了數學歸納法，就會得運用“歸納技巧”從原來問題里減去一個人、一頂黑帽子，把它轉化為一個簡單的問題。

倘使我們把原來的問題再搞得複雜一些：“四個人，三頂黑帽子，若干（不少於 4）頂白帽子”。解這個問題，如果仍舊用我們開始時的敘述方法，那末一定要說成：“甲想……{乙想……[丙想……(丁想……)]}等等”。這樣講起來多費事，簡直象“拗口令”，使人不易听清，不易搞懂。但是掌握了數學歸納法，善於“退”，那就只要用幾句話就可了事，“如果我頭上戴的是黑帽子，那末對他們三個人來說，是‘三個人，兩頂黑帽子，若干頂白帽子’的問題。這個問題他們立刻會解決而不必躊躇。現在他們要躊躇，正是說明我戴的不是黑帽子而是白帽子。”換句話說，“如果我頭上戴的是黑帽子”就是這裡的歸納法假定。

豈特四個人三頂黑帽子，即使象“ n 個人， $n-1$ 頂黑帽子，若干（不少於 n ）頂白帽子”這樣複雜的問題，我們也可以很簡單地解決了。因為當 $n=2$ 時已經解決了，假設當 $n=k$ 時問題已經解決，那末當 $n=k+1$ 時，只要有 1 人戴的是黑帽子，就變成 $n=k$ 的問題，大家都會應用數學歸納法，他們應當

都說出他們自己头上戴的是白帽子,但是他們要躊躇,所以这个人就可以判断出自己头上戴的是白帽子.

讀到这儿,讀者可能領会到两点:

(1) 应用归納法可以处理多么复杂的問題! 懂得它的人,比不懂它的人岂不是“聪明”得多.

(2) 归納法的原則,不但指導我們“进”,而且还教会我們“退”.把問題“退”到最朴素易解的情况,然后再用归納法飞跃前进.这样比学会了“三人問題”,搞“四人問題”,搞通了“四人問題”再嘗試“五人問題”的做法,不是要爽快得多!

当然,我們也不能完全排斥步步前进的做法.當我們看不出归納綫索的时候,先一步一步地前进,也还是必要的.

六 “題”与“解”

数学里,有时候出題容易解題难,凡事問一个为什么,有时候要回答出来确不容易.但也有时候,出題困难解題易.題目本身就包括了解題的方法,难不难在解,而难在怎样想出这个題目来.最显著的是用归納法来证明一些代数恒等式.这时,难不难在应用归納法来证明,而难在怎样想出这些恒等式来.本书开始时所举的例子,就是:人家怎样想出

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 \\ &= (1+2+3+\cdots+n)^2 \end{aligned}$$

来的?

一般地說,求证一个形如

$$a_1 + \cdots + a_n = S_n \quad (1)$$

的恒等式, 本身就建議我們求證 “ $a_{n+1} + S_n = S_{n+1}$ ” 或者 “ $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ”. 而一般講來由 “ a ” 求 “ S ” 較難, 由 “ S ” 求 “ a ” 較易. 並且如果證明了

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1},$$

我們還可以把級數(1)寫成

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

交叉消去即得所求. (注意: 上面這個等式的成立也要用歸納法加以證明才合乎嚴格要求.)

下面我們舉些例子:

例 1 求證:

$$\begin{aligned} &4 \cdot 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 \cdot 13 + 10 \cdot 13 \cdot 16 + \cdots \\ &\quad + (3n+1)(3n+4)(3n+7) \\ &= \frac{1}{12} [(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10) \\ &\quad - 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10]. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

看了這個公式, 就可以知道: 一定會有 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 也就是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12} [(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10) \\ &\quad - (3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)] \\ &= (3n+1)(3n+4)(3n+7). \end{aligned}$$

一算真對. 我們就可以用交叉消去法(或者歸納法)來證明這個公式了.

例2 求证:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \frac{1}{11 \cdot 15 \cdot 19} + \cdots \\ & \quad + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)} \\ & = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3 \cdot 7} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

这个恒等式可以由

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left[\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right] \\ & = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)} \end{aligned}$$

推出.

例3 求证:

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx \\ & = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x \sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

从这个恒等式可以得到启发:

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\sin \frac{1}{2}(n+1)x \sin \frac{1}{2}nx - \sin \frac{1}{2}nx \sin \frac{1}{2}(n-1)x \right]}{\sin \frac{1}{2}x} \\ & = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \left[\sin \frac{1}{2}(n+1)x - \sin \frac{1}{2}(n-1)x \right]}{\sin \frac{1}{2}x} \\ & = 2 \sin \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}nx = \sin nx. \end{aligned}$$

反过来,可以用这个等式来证明原来的恒等式.
用同样的方法,我們可以处理以下的題目:

例 4 求证:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}. \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

例 5 求证:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

(这里, x 不等于 π 的整数倍)

例 6 求证:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n \alpha \\ &= \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}. \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

这些例題的真困难不是在于既得公式之后去寻求它們的证明,而是在于这批恒等式是怎样获得的.

我国古代堆垛术所得出的一些公式,也都属于这一类.

例 7 求证: 当 $n \geq 1$ 的时候,

$$\begin{aligned} & 1 + (1+9) + (1+9+25) + \cdots \\ & \quad + [1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2] \\ &= \frac{1}{3} \left[n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{2} n (n+1) \right]^{①} \end{aligned}$$

① 陈世仁(1676—1722).

以下五題采自元朱世杰：算學啟蒙（1299），四元玉鑒（1303）。

$$\begin{aligned}\text{例 8} \quad & a + 2(a+b) + 3(a+2b) + \cdots + n[a + (n-1)b] \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)[2bn + (3a-2b)]. \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 9} \quad & [a + (n-1)b] + 2[a + (n-2)b] + \cdots \\ & + (n-1)(a+b) + na \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)[bn + (3a-b)]. \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

作为练习，讀者可以試由例 8 直接推出例 9 来；試用兩兩相加兩兩相减找出例 8 例 9 的恒等式来。

$$\begin{aligned}\text{例 10} \quad & a + 3(a+b) + 6(a+2b) + \cdots \\ & + \frac{n}{2}(n+1)[a + (n-1)b] \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[3bn + (4a-3b)]. \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 11} \quad & [a + (n-1)b] + 3[a + (n-2)b] + \cdots \\ & + \frac{1}{2}n(n-1)(a+b) + \frac{1}{2}n(n+1)a \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[bn + (4a-b)]. \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

例 12 在級数

$$1 + 3 + 7 + 12 + 19 + 27 + 37 + 48 + 61 + \cdots$$

里，如果 a_n 是它的第 n 項，那末

$$a_{2l} = 3l^2, \quad a_{2l-1} = 3l(l-1) + 1.$$

这里 l 是大于或者等于 1 的整数。求证：

$$S_{2l-1} = \frac{1}{2}l(4l^2 - 3l + 1);$$

$$S_{2l} = \frac{1}{2}l(4l^2 + 3l + 1).$$

最后一题启发我們想到归納法的另一“变着”：“翘翘板归納法”——有两个命题 A_n 、 B_n ，如果“ A_1 是正确的”，“假設 A_k 是正确的，那末 B_k 也是正确的”，“假設 B_k 是正确的，那末 A_{k+1} 也是正确的”，那末，对于任何自然数 n ，命题 A_n 、 B_n 都是正确的。

这里命题 A_n 是 “ $S_{2n-1} = \frac{1}{2}n(4n^2 - 3n + 1)$ ”，而命题 B_n 是 “ $S_{2n} = \frac{1}{2}n(4n^2 + 3n + 1)$ ”。

显而易见， A_1 是正确的，即 $S_1 = 1$ 。

假設 $S_{2k-1} = \frac{1}{2}k(4k^2 - 3k + 1)$ ，那末

$$S_{2k} = \frac{1}{2}k(4k^2 - 3k + 1) + 3k^2 = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1).$$

这就是說，假設 A_k 是正确的，那末 B_k 也是正确的。

又假設 $S_{2k} = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1)$ ，那末

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1) + 3k(k+1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(k+1)[4(k+1)^2 - 3(k+1) + 1]. \end{aligned}$$

这也就是說，假設 B_k 是正确的，那末 A_{k+1} 也是正确的。

因此， A_n 、 B_n 对于任何自然数 n ，都是正确的。

这个题目是朱世杰研究圓錐垛积得出来的。但照上面这样写下来，就显得有些造作了。

不仅出現过“翘翘板归纳法”，而且还出現过若干結論螺旋式上升的证明方法。例如：有5个命题 A_n, B_n, C_n, D_n, E_n ，現在知道 A_1 是正确的，又 $A_k \rightarrow B_k$ ①， $B_k \rightarrow C_k$ ， $C_k \rightarrow D_k$ ， $D_k \rightarrow E_k$ ，并且 $E_k \rightarrow A_{k+1}$ ，这样，这五个命题就都是正确的。

七 递归函数

上节里我們的主要依据是

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n \quad (1)$$

和

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (2)$$

的关系。这启发了我們，如果知道了(2)，就可以作出一个(1)来。例如，我們知道了公式：

$$\arctg \frac{1}{n} - \arctg \frac{1}{n+1} = \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1},$$

由此就可以作出一个恒等式：

$$\begin{aligned} \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{13} + \cdots + \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} \\ = \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

关系式(2)本身就可以看成是用数学归纳法来定义 S_n 就是：

已知 $S_1 = a_1$ ，假設已知 S_{k-1} ，那末由 $S_k = S_{k-1} + a_k$ 就定义了 S_k 。

① 我們用 $A_k \rightarrow B_k$ 表示“假設 A_k 是正确的，那末 B_k 也是正确的。”

这是所谓递归函数的一个例证。

一般來說，递归函数是一个在正整数集上定义了的函数 $f(n)$ 。首先， $f(1)$ 有定义；其次，如果知道了 $f(1), f(2), \dots, f(k)$ ，那末 $f(k+1)$ 也就完全知道了。这实在不是什么新东西，而只是数学归纳法的重申。

例如，由

$$\begin{cases} f(k+1) = f(k) + k, \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

定义了一个递归函数。通过计算，可以知道 $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 7, \dots$ ，从而可以得出这个递归函数就是

$$f(k) = \frac{1}{2}k(k-1) + 1.$$

这个等式一下就变为一个需要“证明”的问题。而由数学归纳法可以知道：对于所有正整数 n ，有

$$f(n) = \frac{1}{2}n(n-1) + 1.$$

本节开始时的例子，就是求解：

$$\begin{cases} f(k) - f(k+1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1}, \\ f(1) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

跟数学归纳法一样，递归函数也可以有各种形式的“变着”。例如，由关系式

$$f(k+1) = 3f(k) - 2f(k-1)$$

所定义的 $f(k)$ ，就必须由两个已知值，例如 $f(0) = 2, f(1) = 3$

开始.

現在我們来证明这样的开始值:

$$f(n) = 2^n + 1.$$

证明: 当 $n=0, 1$ 的时候, 这个結論显然正确.

假設已知 $f(k) = 2^k + 1$, $f(k-1) = 2^{k-1} + 1$, 那末

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) \\ &= 2^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

由此命题得证.

上面的这个解答 $f(n) = 2^n + 1$ 又是怎样想出来的呢? 可能是从 $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ 等等归纳出来的, 但是从

$$f(k+1) - f(k) = 2[f(k) - f(k-1)]$$

来看, 却会更容易一些.

我們設

$$g(k) = f(k+1) - f(k).$$

那末由

$$g(1) = 2,$$

$$g(k+1) = 2g(k),$$

可見

$$g(k) = 2^k.$$

再由

$$f(k) - f(k-1) = 2^{k-1},$$

得出

$$f(n) - f(0) = \sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)] \textcircled{1}$$

① “ \sum ” 是和的符号, 讀做 “Sigma”.

$\sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)]$ 就是表示下面的和:

$$\begin{aligned} &[f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] \\ &+ \cdots + [f(n) - f(n-1)]. \end{aligned}$$

也就是順次用 $1, 2, 3, \cdots, n$ 代替 $[f(k) - f(k-1)]$ 里的 k , 再把这 n 个差 $[f(1) - f(0)], [f(2) - f(1)], \cdots, [f(n) - f(n-1)]$ 加起来.

下文里我們經常要使用这个符号, 讀者必須熟悉它.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \\
&= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

从而可得

$$f(n) = 2^n + 1.$$

八 排列和組合

数学归纳法最简单的应用之一，是用来研究排列和組合的公式。

讀者在中学代数課程中，已經知道：“从 n 个不同的元素里，每次取 r 个，按照一定的順序摆成一排，叫做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的排列。”排列的种数，叫做排列数。从 n 个不同元素里每次取 r 个元素所有不同的排列数，可以用符号 A_n^r 来表示。对于 A_n^r 有下面的公式：

$$\text{定理 1} \quad A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \quad (1)$$

当时，这个公式并没有作严格的证明，現在我們利用数学归纳法来证明它。

证明 首先， $A_n^1 = n$ 。

这是显然的。如果再能证明

$$A_n^r = n A_{n-1}^{r-1},$$

那末，这个定理就可以应用数学归纳法来证明①。

① 因为当 $n=1$ 的时候，这个定理显然是正确的；假設当 $n=k-1$ 的时候，这个定理是正确的，那末

$$A_k^r = k A_{k-1}^{r-1} = k[(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)]. \quad (\text{这里}, 1 < r < k)$$

所以，当 $n=k$ 的时候，这个定理也是正确的。

我們假定 n 个元素是 a_1, a_2, \dots, a_n , 在每次取出 r 个元素的 A_n^r 种排列法里, 以 a_1 为首的共有 A_{n-1}^{r-1} 种, 以 a_2 为首的同样也有 A_{n-1}^{r-1} 种, 由此即得

$$A_n^r = n A_{n-1}^{r-1}.$$

于是定理得证.

定理 1 的特例是 n 个元素全取的排列数, 它是

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

我們用符号 $n!$ 表示这个乘积, 就是

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n.$$

这样, 定理 1 就可以写成

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

現在我們来研究更一般的情况:

n 个元素里, 有若干个是同类的, 其中有 p 个 a , q 个 b , \dots , 求每次全取这些元素所作成的排列种数. 答案是:

$$N = \frac{n!}{p! q! \cdots}.$$

这个結論可以这样来证明:

如果在 p 个 a 上标上号数 a_1, a_2, \dots, a_p , 作为不同的元素, q 个 b 上标上号数 b_1, b_2, \dots, b_q , 也作为不同的元素, \dots . 这样問題就变成了 n 个不同元素全取的排列, 得出的排列数是

$$P_n = n!.$$

把 a_1, a_2, \dots, a_p 这 p 个元素任意排列的排列数是 $p!$. 但是实际上这 p 个元素是相同的元素, 是分辨不出的, 所以擦去了标号之后, 原来的 $p!$ 个排列只变成了 1 个排列. 因此擦去 a

的编号以后, 排列的种数是

$$\frac{n!}{p!}.$$

同样的, 再擦去 b 的标号以后, 排列的种数就是

$$\frac{n!}{p! q!}$$

等等.

注 我們用一个具体例子来说明. 例如, 求 $aaab$ 全取排列的种数.

编号以后的排列种数是

$$P_4 = 4! = 24.$$

$a_1 a_2 a_3 b$	$a_1 a_2 b a_3$	$a_1 b a_2 a_3$	$b a_1 a_2 a_3$
$a_1 a_3 a_2 b$	$a_1 a_3 b a_2$	$a_1 b a_3 a_2$	$b a_1 a_3 a_2$
$a_2 a_1 a_3 b$	$a_2 a_1 b a_3$	$a_2 b a_1 a_3$	$b a_2 a_1 a_3$
$a_2 a_3 a_1 b$	$a_2 a_3 b a_1$	$a_2 b a_3 a_1$	$b a_2 a_3 a_1$
$a_3 a_1 a_2 b$	$a_3 a_1 b a_2$	$a_3 b a_1 a_2$	$b a_3 a_1 a_2$
$a_3 a_2 a_1 b$	$a_3 a_2 b a_1$	$a_3 b a_2 a_1$	$b a_3 a_2 a_1$

擦去编号以后, 每一直行里的 $6(3!)$ 种, 变成了 1 种, 所以排列种数就成为 4 种: $aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$.

由此可見

$$N = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4.$$

讀者在中学代数課程中, 还曾知道: 从 n 个不同元素里, 每次取出 r 个, 不管怎样的順序并成一組, 叫做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的組合. 組合的种数, 叫做組合数, 从 n 个不同元素里每次取出 r 个元素所有不同的組合数, 可以用符号 C_n^r 来表示. 对于 C_n^r 有下列的公式:

$$\text{定理 2} \quad C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (2)$$

这个定理也可以用数学归纳法来证明.

证明 首先, $C_n^1 = n$.

这是显然的. 如果再能证明当 $1 < r < n$ 的时候,

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}, \quad (3)$$

那末, 这个定理就可以应用数学归纳法来证明①.

我們假定有 n 个不同的元素 a_1, a_2, \dots, a_n , 在每次取出 r 个元素的组合里, 可以分为两类: 一类含有 a_1 , 一类不含有 a_1 . 含有 a_1 的组合数, 就等于从 a_2, a_3, \dots, a_n 里取 $r-1$ 个元素的组合数, 它等于 C_{n-1}^{r-1} ; 不含有 a_1 的组合数, 就等于 a_2, a_3, \dots, a_n 里取 r 个的组合数, 它等于 C_{n-1}^r . 所以

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} \quad (2).$$

于是定理得证.

讀者在中学代数课程中学过的二项式定理

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots \\ &\quad + \dots + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + C_n^n a^n \\ &= \sum_{j=0}^n C_n^j a^j x^{n-j}. \end{aligned}$$

就是利用组合的知识来证明的.

① 因为当 $n=1$ 的时候, 这个定理是正确的; 假设当 $n=k-1$ 的时候, 这个定理是正确的, 那末

$$\begin{aligned} C_k^r &= C_{k-1}^r + C_{k-1}^{r-1} = \frac{(k-1)!}{r!(k-1-r)!} + \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} \\ &= \frac{k!}{r!(k-r)!}. \quad (\text{这里, } 1 < r < k) \end{aligned}$$

所以当 $n=k$ 的时候, 这个定理也是正确的.

② 公式 $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ 是一个十分重要的公式, 詳見拙著《从楊輝三角谈起》(中国青年出版社出版).

九 代数恒等式方面的例题

有不少代数恒等式，它的严格证明，需要用到数学归纳法。这里先讲几个读者所熟悉的例子。

例 1 等差数列的第 n 项，可以用公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (1)$$

表示。这里， a_1 是它的首项， d 是公差。

证明 当 $n=1$ 的时候， $a_1 = a_1$ ，(1)式是成立的。
假设当 $n=k$ 的时候，(1)式是成立的，那末，因为

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &= a_1 + (k-1)d + d \\ &= a_1 + [(k+1)-1]d, \end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 的时候，(1)式也是成立的。由此可知，对于所有的 n ，(1)式都是成立的。

例 2 等差数列前 n 项的和，可以用公式

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d \quad (2)$$

表示。这里， a_1 是它的首项， d 是公差。

这个公式也可以用数学归纳法来证明。

证明 当 $n=1$ 的时候， $S_1 = a_1$ ，(2)式是成立的。
假设当 $n=k$ 的时候，(2)式是成立的，那末

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$

$$= \left[ka_1 + \frac{1}{2}k(k-1)d \right] + \{a_1 + [(k+1)-1]d\}$$

$$= (k+1)a_1 + \frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]d.$$

所以当 $n=k+1$ 的时候, (2) 式也是成立的. 由此可知, 对于所有的 n , (2) 式都是成立的.

注 例 1 里的公式(1)可以直观地得出, 但是例 2 里的公式(2)又怎样得出的呢? 所以从要找出这个公式的角度来考虑, 还是象中学代数课本里那样用“颠倒相加”的方法好. 而数学归纳法的作用只是在找出了这样的公式以后, 给以严格的证明.

例 3 等比数列的第 n 项可以用公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (3)$$

表示; 前 n 项的和可以用公式

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (4)$$

表示. 这里, a_1 是它的首项, q 是公比.

这两个公式也都可以用数学归纳法来证明 (证明留给读者). 象例 2 一样, 公式(4)的导出, 当然也还是象中学代数课本里那样用习惯使用的方法, 就是把

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1},$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n$$

两式相减, 再把所得差的两边同除以 $q-1$ 来得好.

再谈高阶等差级数. 在拙著《从杨辉三角谈起》一书里提出的不少恒等式, 它们都可以用数学归纳法证明的. 其中最主要的是:

$$(1) 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n;$$

$$(2) \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$(3) \quad 1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2);$$

$$(4) \quad 1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\ =\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3);$$

.....

这些公式, 讀者不妨用数学归纳法一一加以验证.

这些公式是怎样得来的呢? 事实上, 它们都可以从上节里的公式(3)

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$$

推出. 例如, 取 $r=2$, 就得

$$\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(n-1)n = n;$$

取 $r=3$, 就得

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \\ = \frac{1}{2}n(n+1);$$

等等. 这样, 应用第七节里所讲的方法, 就可以从这些公式导出上面的恒等式.

有了这些公式, 把 n^2 写成 $2\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]-n$, 把 n^3 写成 $6\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]-6\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]+n$, 就可以算出

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2.$$

作为练习, 請讀者先算出这些公式, 然后用数学归纳法加以证明.

十 差 分

我們把 $f(x) - f(x-1)$ 叫做函数 $f(x)$ 的差分. 記做

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1). \quad (1)$$

例如, $f(n) = C_n^r$, 它的差分就是

$$\begin{aligned} \Delta f(n) &= f(n) - f(n-1) \\ &= C_n^r - C_{n-1}^r \\ &= C_{n-1}^{r-1}. \quad [\text{应用第八节里的公式(3).}] \end{aligned}$$

前面我們所讲的求和问题

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n, \quad [=f(n)]$$

可以看做給了差分 $a_n = g(n)$, 求原函数 $f(n)$, 使

$$f(n) - f(n-1) = g(n) \quad (2)$$

的問題. 方程(2)叫做差分方程.

用数学归纳法的眼光来看, (2)式不过說出了归纳法的第二句話: “如果知道了 $f(n-1)$, 那末可以定出 $f(n)$ [$f(n) = f(n-1) + g(n)$] 来. 所以只有(2)式还不能完全定义 $f(n)$, 还必须添上一句: “ $f(0)$ 如何”. 加上了这句話, 归纳法的程序完成了, 因而对于所有的自然数 n , 函数 $f(n)$ 都定义了.

函数 $f(x)$ 的差分 $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$, 还是 x 的函

数, 我們可以再求它的差分, 这就引出了二阶差分的概念, 就是

$$\Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x) - f(x-1)).$$

我們用 $\Delta^2 f(x)$ 来表示.

一般的, 如果对函数 $f(x)$ 的 $r-1$ 阶差分再求差分, 就得到了 $f(x)$ 的 r 阶差分, 就是

$$\Delta^r f(x) = \Delta(\Delta^{r-1} f(x)). \quad (3)$$

現在我們用数学归纳法来证明下面的恒等式:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(x-j) \textcircled{1}. \quad (4)$$

证明 当 $n=1$ 的时候, (4) 式就表示

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1),$$

命题显然正确.

假设当 $n=k$ 的时候, (4) 式是成立的, 那末当 $n=k+1$ 的时候,

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} f(x) &= \Delta(\Delta^k f(x)) \\ &= \Delta \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) \right) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \Delta f(x-j) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j [f(x-j) - f(x-j-1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(x-j) \\ &= f(x) - C_n^1 f(x-1) + C_n^2 f(x-2) \\ &\quad - \dots + (-1)^n C_n^n f(x-n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) \\
&\quad - \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j-1) \text{ ①} \\
&= \left[f(x) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^{j-1} f(x-j) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{k+1} f(x-k-1) \right] \\
&= f(x) + (-1)^{k+1} f(x-k-1) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^j (C_k^j + C_k^{j-1}) f(x-j) \\
&= f(x) + (-1)^{k+1} f(x-k-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{① } \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) &= C_k^0 f(x) - C_k^1 f(x-1) + C_k^2 f(x-2) \\
&\quad - \dots + (-1)^k C_k^k f(x-k) \\
&= f(x) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^j f(x-j); \\
&\quad - \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j-1) \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} C_k^j f(x-j-1) \\
&= -C_k^0 f(x-1) + C_k^1 f(x-2) - \dots \\
&\quad + (-1)^k C_k^{k-1} f(x-k) + (-1)^{k+1} C_k^k f(x-k-1) \\
&= \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^{j-1} f(x-j) + (-1)^{k+1} f(x-k-1).
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j) \textcircled{1} .$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j).$$

于是定理得证.

如果 $f(x)$ 是 x 的多项式, 那末经过一次差分, 多项式的次数就降低 1 次, 因此对于任何一个次数低于 k 次的多项式, 经过 k 次差分, 一定等于 0. 也就是说, 如果 $f(x)$ 是次数低于 k 次的多项式, 那末

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) = 0. \quad (5)$$

特别的, 当 $x=k$ 的时候, 取 $k-j=l$, 那末

$$\sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} C_k^l f(l) = 0. \quad (6)$$

一阶差分方程

$$f(x) - f(x-1) = g(x)$$

的解是

$$f(n) - f(0) = \sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)]$$

$$= \sum_{k=1}^n g(k).$$

更一般的一阶差分方程

$$\textcircled{1} f(x) + (-1)^{k+1} f(x-k-1) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j)$$

$$= f(x) + (-1) C_{k+1}^1 f(x-1) + (-1)^2 C_{k+1}^2 f(x-2) + \dots$$

$$+ (-1)^k C_{k+1}^k f(x-k) + (-1)^{k+1} f(x-k-1)$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j).$$

$$af(x) - bf(x-1) = g(x),$$

不妨假定 $a=1$, 于是

$$\begin{aligned} f(n) &= g(n) + bf(n-1) \\ &= g(n) + b[g(n-1) + bf(n-2)] \\ &= g(n) + bg(n-1) + b^2f(n-2) \\ &\dots\dots\dots \\ &= g(n) + bg(n-1) + b^2g(n-2) + \dots\dots \\ &\quad + b^{n-1}g(1) + b^nf(0). \end{aligned}$$

(可以用数学归纳法来证明)

二阶差分方程

$$f(x) + \alpha f(x-1) + \beta f(x-2) = g(x), \quad (7)$$

可以变成两次一阶差分方程来解. 因为

$$\begin{aligned} [f(x) + \lambda f(x-1)] + \mu [f(x-1) + \lambda f(x-2)] \\ = f(x) + (\lambda + \mu)f(x-1) + \lambda\mu f(x-2), \end{aligned}$$

从 $\lambda + \mu = \alpha$, $\lambda\mu = \beta$ 里解出 λ 和 μ 来. 再设

$$h(x) = f(x) + \lambda f(x-1),$$

那末方程(7)就变成先求

$$h(x) + \mu h(x-1) = g(x),$$

再求

$$f(x) + \lambda f(x-1) = h(x)$$

的解了.

例 求差分方程

$$\begin{aligned} f(x) - 3f(x-1) + 2f(x-2) &= 1, \\ f(0) &= 0, \quad f(1) = 1 \end{aligned}$$

的解.

解 设 $h(x) = f(x) - f(x-1)$, 得

$$h(x) - 2h(x-1) = 1, \quad h(1) = 1.$$

解得

$$h(n) = 2^n - 1.$$

再从

$$f(x) - f(x-1) = 2^x - 1, \quad f(0) = 0,$$

解得

$$f(n) = 2^{n+1} - n - 2.$$

十一 李善兰恒等式

这里,我附带地介绍两个有趣的恒等式.

清末数学家李善兰(1810—1882)曾提出了恒等式

$$\sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 C_{n+2k-j}^{2k} = (C_{n+k}^k)^2. \quad (1)$$

这个恒等式流传于海外. 我们现在借讲过差分性质之便, 来证明这个恒等式.

因为

$$C_{n+k}^k = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!},$$

所以李善兰恒等式(1)是下面这个更一般的恒等式

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!} \\ = \left[\frac{(x+k)(x+k-1)\cdots(x+1)}{k!} \right]^2, \end{aligned} \quad (2)$$

在 $x=n$ 时的特殊情形.

现在我们来证明恒等式(2)的成立.

(2)式的左右两边都是 x 的 $2k$ 次多项式, 并且右边的多项式有二重根 $x = -l$ ($1 \leq l \leq k$), 如果我们能够证明:

(i) 左右两边 x^{2k} 的系数相等, 就是

$$\sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 = \frac{(2k)!}{k! k!}; \quad (3)$$

(ii) 左边也有 $x = -l$ ($1 \leq l \leq k$) 是它的重根, 那末问题就解决了.

先证明(i). 根据二项式定理, 得

$$(1+x)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j x^j.$$

因此, $(1+x)^k \cdot (1+x)^k$ 里 x^k 的系数等于

$$\sum_{j+l=k} C_k^j C_k^l = \sum_{j=0}^k C_k^j C_k^{k-j} = \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2.$$

另一方面, 从

$$(1+x)^k \cdot (1+x)^k = (1+x)^{2k}$$

的展开式里, 可知 x^k 的系数是

$$C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k! k!}.$$

所以(3)式成立.

现在再来证(ii). (2)式里左边每一项里都含有因式 $x+l$, 所以它有根 $x = -l$ 是显然的. 问题只在于证明它有二重根 $x = -l$.

因为(2)式左边各项都有因式 $x+l$, 所以

$$\frac{1}{x+l} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1) \cdots (x-j+1)}{(2k)!}$$

$$= \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x+l+1)(x+l-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!}.$$

我們证明, 当 $x = -l$ 时, 这个式子的值是 0.

事实上, 当 $x = -l$ 时, 上式的值等于

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{[(2k-j-l)(2k-j-l-1)\cdots 1][(-1)\cdots(-l-j+1)]}{(2k)!} \\ &= \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{k!}{(k-j)!j!} \cdot \frac{(2k-j-l)!(l+j-1)!}{(2k)!} (-1)^{l+j-1} \\ &= (-1)^{l-1} \frac{k!}{(2k)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \frac{(2k-j-l)!(l+j-1)!}{(k-j)!j!} \\ &= (-1)^{l-1} \frac{k!}{(2k)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (2k-j-l)\cdots \\ & \quad (k-j+1)(l+j-1)\cdots(j+1). \quad (4) \end{aligned}$$

这里

$$(2k-j-l)\cdots(k-j+1)(l+j-1)\cdots(j+1)$$

是多项式

$$f(x) = (2k-x-l)\cdots(k-x+1)(l+x-1)\cdots(x+1)$$

当 $x=j$ 时的值, 而 $f(x)$ 是 x 的

$$(k-l) + (l-1) = k-1$$

次多项式. 因此根据上节里的公式(5)(第 38 页), 可知(4)式等于 0.

由此, 我們就证明了(2)式确是一个恒等式.

施惠同把李善兰恒等式进一步推广为:

設 $l \geq k \geq 0$, l, k 是整数, 那末

$$(*+k)(*+l) = \sum_{j=0}^k C_k^j C_l^j (*+k+l-j).$$

这里, x 是实数, 符号 $(x)_k^+$ 表示多项式 $\frac{1}{k!}(x+k)(x+k-1)\cdots(x+1)$.

这个恒等式是怎样想出来的呢?

十二 不等式方面的例题

数学归纳法在证明不等式方面, 也很有用. 下面我们举几个例子.

例 1 求证 n 个非负数的几何平均数不大于它们的算术平均数.

n 个非负数 a_1, a_2, \dots, a_n 的几何平均数是

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}};$$

算术平均数是

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

所以本题就是要求证明:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \quad (1)$$

证明 当 $n=1$ 的时候, (1) 式不证自明. 如果 a_1, a_2, \dots, a_n 里有一个等于 0, (1) 式也不证自明.

现在假设

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n.$$

如果 $a_1 = a_n$, 那末所有的 a_j ($j=1, 2, \dots, n$) 都相等, (1) 式也就不证自明. 所以我们进一步假设 $a_1 < a_n$, 并且假设

$$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \quad (2)$$

成立. 显然(2)式的右边 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} < a_n$. 因为

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{(n-1) \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} + a_n}{n} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n}, \end{aligned}$$

把等式两边都乘方 n ($n > 1$) 次, 并且由

$$(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b, \quad (a > 0, b > 0)$$

可知

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n &> \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \right)^n \\ &+ n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \left(\frac{a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n} \right) \\ &= a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \\ &\geq a_n (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n, \end{aligned}$$

所以

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

也成立. 于是定理得证.

上面的证明中还说明了, 当各数都相等的时候, (1)式才会出现等号.

下面是另一个证法, 它提出了数学归纳法的另一变着“反向归纳法”.

别证 当 $n=2$ 的时候, (1) 式是

$$(a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

这可以由 $(a_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{1}{2}})^2 \geq 0$ 直接推出.

现在我们来证明, 当 $n=2^p$, p 是任意自然数的时候, 定理都是成立的. (用数学归纳法)

假设当 $n=2^k$ 的时候, (1) 式是成立的, 那末

$$\begin{aligned} & (a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}} \\ &= [(a_1 a_2 \cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} (a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} [(a_1 a_2 \cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} + (a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k} \right] \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

所以当 $n=2^{k+1}$ 的时候, (1) 式也是成立的. 因此, 当 $n=2^p$, p 是任何自然数的时候, (1) 式都是成立的.

进一步再推到一般的 n . 我们在假设当 $n=k$ 的时候, (1) 式成立的前提下来证明, 当 $n=k-1$ 的时候, 它也成立.

取 $a_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}$. 因为当 $n=k$ 的时候, (1)

式是成立的, 所以

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k}{k} \\ &\geq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)^{\frac{1}{k}} \\ &= \left(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \right)^{\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

两边同除以 $\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \right)^{\frac{1}{k}}$, 得

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \geq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k}}.$$

由此得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}.$$

即得所证.

至此定理就完全得到了证明.

例 2 (加权平均) 设 p_1, p_2, \cdots, p_n 是 n 个正数, 它们的和是 1. 那末, 当 $a_v \geq 0$ ($v=1, 2, \cdots, n$) 的时候,

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n. \quad (3)$$

例 1 显然是例 2 在 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ 时的特例. 但例 2 也并未走得很远. 事实上, 如果 p_1, p_2, \cdots, p_n 是正有理数, 它们的公分母是 l , 那末可以记做 $p_v = \frac{m_v}{l}$, 而 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = l$. 我们想要证明的就变成是

$$(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n})^{\frac{1}{l}} \leq \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n}{l}.$$

这就是例 1 里取 m_1 个等于 a_1 , m_2 个等于 a_2 , \cdots , m_n 个等于 a_n 的特例而已. 也就是, (3) 式对适合于 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ 的任意 n 个正有理数 p_1, p_2, \cdots, p_n 都成立.

讀者如果學過極限的概念，就不難推出(3)式對所有適合於 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ 的正實數 p_1, p_2, \cdots, p_n 都成立。

例3 設 a_1, a_2, \cdots, a_n 是正數，並且

$$\begin{aligned} & (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) \\ &= x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n. \end{aligned}$$

這裡 c_r 是從 a_1, a_2, \cdots, a_n 里每次任意取 r 個乘起來的總和，它一定含有 C_n^r 項。而 C_n^r 就是從 n 個元素里每次取 r 個的組合數，也就是

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}.$$

現在定義 P_r 是從 a_1, a_2, \cdots, a_n 里每次取 r 個的乘積的平均數，就是

$$P_r = \frac{c_r}{C_n^r}.$$

不難看到， P_1 就是 a_1, a_2, \cdots, a_n 的算術平均數，而 P_n 就是 a_1, a_2, \cdots, a_n 的幾何平均數的 n 次方。

比例1更廣泛些有以下的結果：

$$P_1 \geq P_2^{\frac{1}{2}} \geq P_3^{\frac{1}{3}} \cdots \geq P_n^{\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

為了方便，我們再定義 $c_0 = 1, P_0 = 1$ 。於是這個結果可以由以下的結果推導出來：

$$P_{r-1}P_{r+1} \leq (P_r)^2. \quad (1 \leq r \leq n) \quad (5)$$

我們先用歸納法證明(5)式。當 $n=2$ 的時候，它就是

$$a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2,$$

所以(5)式一定成立。

假設對於 $(n-1)$ 個數 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ ，(5)式是成立的。

而用 c'_r 、 P'_r 分别表示由这 $(n-1)$ 个数所做成的 c_r 、 P_r ，又設 $c'_0 = P'_0 = 1$ ， $c'_n = P'_n = 0$ ，那末

$$c_r = c'_r + a_n c'_{r-1} \quad (1 \leq r \leq n)$$

和

$$P_r = \frac{n-r}{n} P'_r + \frac{r}{n} a_n P'_{r-1}. \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$\left(\text{这里用到了 } \frac{C_{n-1}^r}{C_n^r} = \frac{n-r}{n}, \quad \frac{C_{n-1}^{r-1}}{C_n^r} = \frac{r}{n} \right)$$

因此

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2. \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

这里

$$A = [(n-r)^2 - 1]P'_{r-1}P'_{r+1} - (n-r)^2P_r'^2,$$

$$B = (n-r+1)(r+1)P'_{r-1}P'_r \\ + (n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} \\ - 2r(n-r)P'_{r-1}P'_r,$$

$$C = (r^2 - 1)P'_{r-2}P'_r - r^2P_{r-1}'^2.$$

由归纳法的假定与 $P_0 = P'_0 = 1$ ，易見

$$P'_{r-1}P'_{r+1} \leq P_r'^2, \quad (1 \leq r \leq n-2)$$

$$P'_{r-2}P'_r \leq P_{r-1}'^2, \quad (2 \leq r \leq n-1)$$

由此推得

$$P'_{r-2}P'_{r+1} \leq P'_{r-1}P'_r. \quad (2 \leq r \leq n-1)$$

因此，当 $1 \leq r \leq n-1$ 的时候，

$$A \leq ([(n-r)^2 - 1] - (n-r)^2)P_r'^2 = -P_r'^2,$$

$$B \leq [(n-r+1)(r+1) + (n-r-1)(r-1) \\ - 2r(n-r)]P'_{r-1}P'_r = 2P'_{r-1}P'_r,$$

$$C \leq [(r^2 - 1) - r^2] P_{r-1}'^2 = -P_{r-1}'^2.$$

所以

$$\begin{aligned} n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) &\leq -P_r'^2 + 2P_{r-1}'P_r' - P_{r-1}'^2 \\ &= -(P_r' - P_{r-1}')^2 \leq 0. \end{aligned}$$

因此

$$P_{r-1}P_{r+1} \leq P_r^2.$$

即得所证.

再由(5)推出(4)来, 由(5)可知

$$\begin{aligned} (P_0P_2)(P_1P_3)^2(P_2P_4)^3 \cdots (P_{r-1}P_{r+1})^r \\ \leq P_1^2P_2^4P_3^6 \cdots P_r^{2r}, \end{aligned}$$

得

$$P_{r+1}^r \leq P_r^{r+1},$$

就是

$$P_r^{\frac{1}{r}} \geq P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}.$$

这就是(4)式.

从这个問題就可以推出:

$$C_{r-1}C_{r+1} < C_r^2. \quad (6)$$

因为由

$$P_{r-1}P_{r+1} \leq P_r^2$$

得出

$$C_{r-1}C_{r+1} < \frac{(r+1)(n-r+1)}{r(n-r)} C_{r-1}C_{r+1} \leq C_r^2.$$

所以这是較弱的結論.

由(6)推出, 当 $r < s$ 的时候, (要不要用归納法?)

$$C_{r-1}C_s < C_rC_{s-1}. \quad (7)$$

由此也证明了, 如果方程

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

只有負根, 那末它的系数一定适合于(6)与(7).

十三 几何方面的例題

数学归纳法还可以用来证明几何方面的问题. 下面我们也举几个例子.

例 1 平面上有 n 条直线, 其中没有两条平行, 也没有三条经过同一点. 求证: 它們

- (1) 共有 $V_n = \frac{1}{2} n(n-1)$ 个交点;
- (2) 互相分割成 $E_n = n^2$ 条线段;
- (3) 把平面分割成 $S_n = 1 + \frac{1}{2} n(n+1)$ 块.

证明 假设命题在 $n-1$ 条直线时是正确的. 现在来看添上一条直线后的情况.

新添上去的 1 条直线与原来的 $n-1$ 条直线各有 1 个交点, 因此

$$V_n = V_{n-1} + n - 1.$$

这新添上去的 1 条直线被原来的 $n-1$ 条直线分割为 n 段, 而它又把原来的 $n-1$ 条直线每条多分割出一段, 因此

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n-1} + n + n - 1 \\ &= E_{n-1} + 2n - 1. \end{aligned}$$

这新添上去的 1 条直线被分割为 n 段, 每段把一块平面分成两块, 总共要添出 n 块, 因此

$$S_n = S_{n-1} + n.$$

当 $n=1$ 的时候, $V_1=0$, $E_1=1$, $S_1=2$.

因此,

$$\begin{aligned} V_n &= (n-1) + V_{n-1} \\ &= (n-1) + (n-2) + V_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots\dots + 1 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n &= (2n-1) + E_{n-1} \\ &= (2n-1) + (2n-3) + E_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ &= (2n-1) + (2n-3) + \dots\dots + 1 \\ &= n^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= n + S_{n-1} \\ &= n + (n-1) + S_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ &= n + (n-1) + \dots\dots + 2 + 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + 1. \end{aligned}$$

思考题: 如果平面上有 n 条直线, 其中 a 条过同一点, b 条过同一点, $\dots\dots$, 这 n 条直线分平面为多少份?

例 2 空间有 n 个平面, 其中没有两个平面平行, 没有三个平面相交于同一条直线, 也没有四个平面过同一点. 求证: 它们

(1) 有 $V_n = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 个交点;

(2) 有 $E_n = \frac{1}{2}n(n-1)^2$ 段交綫;

(3) 有 $S_n = n + \frac{1}{2}n^2(n-1)$ 片面;

(4) 把空間分成 $F_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ 份.

证明 (1) 每三个平面有 1 个交点, 所以共有

$$C_n^3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

个交点.

(2) 每两个平面有 1 条交綫, 所以共有

$$C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

条交綫. 而每条交綫又被其他 $n-2$ 个平面截为 $n-1$ 段, 因此得

$$E_n = C_n^2 \cdot (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)^2.$$

(3) 在每个平面上都有这平面与其他 $n-1$ 个平面的 $n-1$ 条交綫, 而这平面被这 $n-1$ 条交綫割成 $1 + \frac{1}{2}n(n-1)$ 块 (例 1). 因此共有

$$S_n = n \left[1 + \frac{1}{2}n(n-1) \right] = n + \frac{1}{2}n^2(n-1)$$

片面.

(4) 原来 $n-1$ 个平面已把空間分成为 F_{n-1} 块. 再添上 1 个平面, 这平面上被分为 $1 + \frac{1}{2}n(n-1)$ 部分, 每一部分又把一空間块切成两块. 因此得

$$F_n = F_{n-1} + 1 + \frac{1}{2}n(n-1).$$

应用归纳法, 由

$$F_1 = 2 \text{ 和 } F_{n-1} = \frac{1}{6}[(n-1)^3 + 5(n-1) + 6]$$

即可推得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{6}[(n-1)^3 + 5(n-1) + 6] + 1 + \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6). \end{aligned}$$

例 3 过同一点的 n 个平面, 其中没有 3 个交于同一条直线, 它们把空间分为 $[n(n-1)+2]$ 份.

证明留给读者.

与此等价的问题有:

例 4 球面上以球心为中心的圆称为大圆. 设有 n 个大圆, 其中任何 3 个都不能在球面上有同一个交点, 这些大圆把球面分成 $[n(n-1)+2]$ 份.

思考题: 依经纬度每隔 30° 作一单位来划分球面, 这样划出的区域有多少点、线、面?

例 5 平面上若干条线段连在一起组成一个几何图形, 其中有顶点, 有边 (两端都是顶点的线段, 并且线段中间再没有别的顶点), 有面 (四周被线段所围绕的部分, 并且不是由两个或者两个以上的面合起来的). 如果用 V 、 E 和 S 分别表示顶点数、边数和面数, 求证:

$$V - E + S = 1. \quad (1)$$

证明 我们应用数学归纳法.

当 $n=1$ 就是有 1 条线段的时候, 有 2 个点, 1 条线, 无

面，也就是

$$V_1=2, \quad E_1=1, \quad S_1=0.$$

所以結論是正确的。

假設对由不多于 k 条綫段組成的图形，这个定理成立，現在证明对由 $(k+1)$ 条綫段組成的图形，这个定理也成立。

添上一条綫可以有几种添法，但是这条綫是与原来的图形連在一起的，所以至少要有一端在原图形上。根据这一点，我們来考虑以下各种可能情况。

(1) 一端在图形外，另一端就是原来的頂点。这样，点数加上 1，綫数加上 1，面数不变。这就是要在原来的公式的左边加上 $1-1+0=0$ ，所以(1)式成立。

(2) 一端在图形外，另一端在某一条綫段上。这样，点数加上 2，綫数也加上 2 (除掉添上的一条綫之外，原来的某一条綫被分为两段)，面数不变。因为 $2-2+0=0$ ，所以(1)式仍成立。

(3) 两端恰好是原来的两頂点。这时，这条綫段把一个面一分为两，即綫、面数各加上 1，而点数不变。因为 $0-1+1=0$ ，所以(1)式仍成立。

(4) 一端是頂点，另一端在一条边上。这时，点数加上 1，边数加上 2 (一条是添的綫，另一条来自把一边一分为两)，面数加上 1。因为 $1-2+1=0$ ，所以(1)式仍成立。

(5) 两端都在边上。这时，点数加上 2，边数加上 3，面数加上 1。因为 $2-3+1=0$ ，所以(1)式仍成立。

綜上所述，可知公式

$$V-E+F=1$$

对于所有的 n 都成立。

十四 自然数的性质

作为本书的结束, 这里来谈谈自然数的性质.

众所周知, 自然数就是指

$$1, 2, 3, \dots$$

这些数所组成的整体.

对于自然数有以下性质:

(1) 1 是自然数.

(2) 每一个确定的自然数 a , 都有一个确定的随从^① a' , a' 也是自然数.

(3) 1 非随从, 即 $1 \neq a'$.

(4) 一个数只能是某一个数的随从, 或者根本不是随从, 即由

$$a' = b',$$

一定能推得

$$a = b.$$

(5) 任意一个自然数的集合, 如果包含 1, 并且假设包含 a , 也一定包含 a 的随从 a' , 那末这个集合包含所有的自然数.

这五条自然数的性质是由 Peano 抽象出来的, 因此通常把它叫做自然数的裴雅诺 (Peano) 公理. 特别的, 其中的性质(5)是数学归纳法(也称完全归纳法)的根据.

现在我们来证明以下的基本性质 (也称数学归纳法的第

^① “随从”也叫做后继数, 就是紧接在某一个自然数后面的数. 例如, 1 的随从是 2; 2 的随从是 3 等等.

1964/6/19

二形式):

一批自然数里一定有一个最小的数, 也就是这个数小于其他所有的数.

证明 在这集合里任意取一个数 n , 大于 n 的不必讨论了. 我们需要讨论的是那些不大于 n 的自然数里一定有一个最小的数.

应用归纳法, 如果 $n=1$, 它本身就是自然数里的最小的数. 如果这集合里没有小于 n 的自然数存在, 那末 n 就是最小的, 也不必讨论了. 如果有一个 $m < n$, 那末由数学归纳法的假设, 知道集合里不大于 m 的自然数里一定有一个最小的数存在. 这个数也就是原集合里的最小的数. 即得所证.

反过来, 也可以用这个性质来推出“数学归纳法”.

假设对于某些自然数命题是不正确的, 那末, 一定有一个最小的自然数 $n=k$ 使这个命题不正确; 也就是, 当 $n=k-1$ 的时候, 命题正确, 而当 $n=k$ 的时候, 这个命题不正确. 这与归纳法的假定是矛盾的.

“最小数原则”不仅在理论研究上很重要, 在具体使用时, 有时也比归纳法原来的形式为方便. 但在这本书里, 不准备加以深论了.